

Avaliação e Monitoramento do Desempenho de Modelos de Previsão

Altair Carlos da Cruz (UDESC-SC) altair.cruz@udesc.br
Claiton Emilio do Amaral (UNIVILLE-SC) claiton.emilio@univille.br
Custodio da Cunha Alves (UNIVILLE-SC) custodio.alves@univille.br
Elisa Henning (UDESC-SC) elisa.henning@udesc.br
Emerson José Corazza (UNIVILLE-SC) ej.corazza@gmail.com

Resumo:

A avaliação e o monitoramento do desempenho de modelos de previsão é uma etapa essencial da análise estatística para qualquer projeto que envolva um bom sistema de previsão. Essa etapa é fundamental e deve ser uma atividade contínua após a implantação do modelo para garantir que ele ainda está funcionando de forma satisfatória. Em previsão, é natural que as condições mudem ao longo do tempo, isso significa que um modelo que teve bom desempenho no passado pode ter seu desempenho deteriorado. Normalmente, essa deterioração poderá resultar em erros maiores ou mais erros sistemáticos de previsão. Este trabalho propõe o desenvolvimento e a implementação de um processo de acompanhamento da previsão para assegurar que a deterioração do desempenho seja razoavelmente detectada em menor tempo possível. Nessa abordagem, as medidas quantitativas de acurácia da previsão são avaliadas para validação do modelo. Além disso, gráficos de controle para erros de previsão são aplicados para monitorar rotineiramente o desempenho de modelos de previsão com o objetivo de aumentar a consistência de acurácia desses modelos. Uma aplicação envolvendo dados reais referentes ao histórico de vendas mensais de uma indústria é apresentada para exemplificar a sistemática da avaliação e o monitoramento do desempenho de modelos de previsão.

Palavras chave: Erros de previsão, Gráficos de controle, Sistema de previsão.

Evaluating and Monitoring of the Performance of Forecasting Models

Abstract

The evaluation and monitoring of the performance of forecasting models is an essential step in statistical analysis for any project that involves a good forecasting system. This step is crucial and should be an ongoing activity after model implementation to ensure that the system is still working satisfactorily. In forecasting, it is natural that conditions change over time, it means that a model that performed well in the past may have their performance deteriorated. Normally, this deterioration may result in higher errors or more forecast systematic errors. This paper proposes the development and implementation of a monitoring process to ensure that the forecast performance deterioration it is reasonably detected as soon as possible. In this approach, the quantitative measures of forecast accuracy were evaluated to validate the model. In addition, control charts for forecast errors were applied routinely to monitor the performance of predictive models in order to increase the consistency of accuracy of these models. An application involving real data relating to historical monthly sales of an industry was presented to exemplify the systematic of evaluation and the monitoring of the forecasting models performance.

Key-words: Forecasting errors, Control charts, Forecasting system.

1. Introdução

O desenvolvimento e a implementação de procedimentos para a avaliação e o monitoramento do desempenho de modelos de previsão são componentes essenciais para um bom projeto de sistema de previsão. Não importa o quanto de esforço possa ter sido empregado no desenvolvimento do modelo de previsão e, independente do seu bom funcionamento inicial, com o tempo, é provável que seu desempenho poderá ser reduzido (MONTGOMERY, *et al.*, 2008). Neste cenário, o padrão subjacente da série temporal poderá mudar, as forças inerciais internas que impulsionam o processo podem evoluir ao longo do tempo, ou ainda devido a eventos externos, tais como a entrada de novos clientes no mercado. Por exemplo, uma mudança do nível ou da inclinação pode ocorrer na variável que está a sendo prevista. Além disso, também é possível que a variabilidade inerente aos dados aumente.

Os erros de previsão para um passo a frente são normalmente utilizados para monitorar previsões. A razão para isto é que as alterações nas séries temporais subjacentes também geralmente são refletidas nos erros de previsão. Por exemplo, se uma mudança de nível ocorre na série temporal, à sequência de erros de previsão deixa de flutuar em torno de zero; isto é, um desvio positivo ou negativo é introduzido. Existem várias formas para controlar o desempenho de modelos de previsão. A maneira mais simples é aplicar gráficos de controle para monitorar os erros de previsão.

Este trabalho tem por objetivo principal propor a aplicação contínua de gráficos de controle para monitorar rotineiramente erros em modelos de previsão após a sua implantação fundamentada numa perspectiva de aumentar a consistência de acurácia desses modelos.

O artigo está estruturado em cinco seções, incluindo a presente introdução. A seção 2 aborda através de um breve referencial teórico as principais medidas estatísticas de acurácia para avaliar o desempenho sobre erros em modelos de previsão. Os principais gráficos de controle aplicados para o monitoramento do desempenho em modelos de previsão que inclui o controle efetivo dos erros (resíduos) são apresentados na seção 3. A seção 4 ilustra a partir de dados reais uma aplicação para exemplificar a sistemática da avaliação e monitoramento do desempenho destes modelos e, finalmente, a seção 5 apresenta as considerações finais.

2. Avaliação e monitoramento do desempenho de modelos de previsão

A pesquisa por modelos estatísticos de previsão adequados para prever quantitativamente uma variável e medir a qualidade dessa previsão tem sido um diferencial cada vez mais utilizado pelas empresas para antecipar cenários futuros que contribuem para planejar, alocar e dimensionar recursos de modo a tentar reduzir custos desnecessários decorrentes de decisões equivocadas. As empresas recorrem freqüentemente a esses modelos estatísticos para áreas distintas como a gestão de inventário, planejamento da produção, escalonamento dos recursos humanos, controle do processo, entre outras. O objetivo central da utilização dos métodos de previsão é prever os acontecimentos futuros, tendo como propósito a redução do risco na tomada de decisão (VERISSIMO, *et al.*, 2012).

O processo de estabelecer previsões constitui-se em uma das mais importantes ações no que se refere a diversas tomadas de decisões no dia a dia de uma organização. No setor industrial, por exemplo, a mensuração da qualidade das previsões é fundamental para reduzir de forma significativa a variabilidade de um processo produtivo. Os produtos devem ser fabricados dentro das medidas de conformidade e isso significa manter tanto as médias no alvo quanto a dispersão das medições contidas em valores mínimos (SAMOHYL, 2008). Este processo compreende uma série de atividades relacionadas que transformam uma ou mais entradas em uma ou mais saídas. Todas as atividades de trabalho são realizadas em processos, e a previsão não é exceção. Estas atividades são mostradas na figura 1.

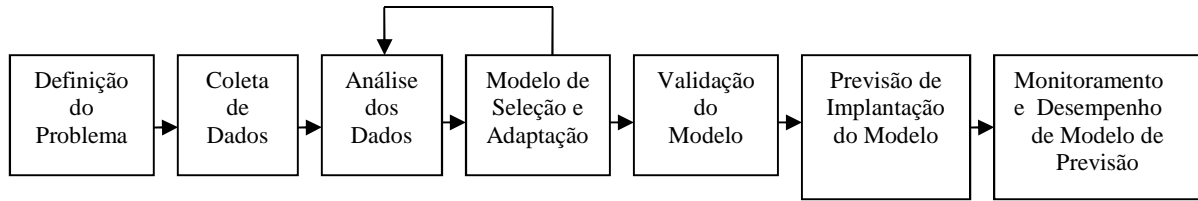


Figura 1- Processo de previsão (Adaptado de Montgomery *et al.*, 2008)

O monitoramento e desempenho de modelo de previsão, última atividade de trabalho de um sistema de previsão conforme figura 1, é abordada neste trabalho como atividade contínua após a implantação do modelo para garantir que ele ainda apresenta desempenho satisfatório. Em previsão, é natural que determinadas condições mudem ao longo do tempo, o que implica que um modelo com bom desempenho no passado, com o passar do tempo, tenha seu desempenho alterado. Normalmente, a redução do desempenho de um modelo, resulta em erros maiores ou mais sistemáticos de previsão. Consequentemente, o monitoramento dos erros de previsão se constitui em uma parte essencial do projeto de um bom sistema de previsão.

Altienza *et al.* (1997) propõem um estudo comparativo entre algumas etapas dos processos de previsão e de controle estatístico, com utilização de gráficos de controle. Enquanto o modelo de previsão realiza a estimação de parâmetros para a equação de previsão, o gráfico de controle calcula os limites de controles. Para a previsão, quando há violações nas suposições do modelo, deve-se reformulá-lo ou escolher outro modelo. Já para o controle estatístico de processos, quando um ponto é localizado além dos limites de controle (violações do modelo), muitos usuários consideram o processo instável estatisticamente. Enquanto o modelo de previsão for adequado, ele será usado para gerá-las, e para os gráficos de controle, eles serão utilizados para gerar a linha de dados *versus* observações.

Para analisar a forma de avaliar o desempenho de um modelo de previsão para uma série temporal em particular ou aplicação, é importante definir com cuidado o significado de desempenho. A avaliação do desempenho, com base no ajuste da previsão ou modelo de séries temporais de dados históricos é considerada atraente em qualquer sistema de previsão. Há muitas medidas estatísticas que descrevem a forma como um modelo se encaixa em uma determinada amostra de dados, e algumas delas são descritas nesta seção. Esta abordagem de qualidade do ajuste para a série, muitas vezes utiliza os resíduos sem refletir a real capacidade da técnica da previsão para prever com sucesso observações futuras (MONTGOMERY, *et al.*, 2008).

O usuário de previsão, muitas vezes está muito preocupado com a precisão da previsão futura, e não com o modelo de qualidade do ajuste, por isso é importante avaliar esse aspecto em qualquer modelo de previsão recomendado. Às vezes é chamada de precisão ou acurácia do erro de previsão fora da amostra, para distingui-la com os resíduos que surgem a partir de um processo de ajuste do modelo.

A medida quantitativa de acurácia ou precisão da previsão deve sempre ser avaliada como parte de um esforço de validação do modelo. Assim, validar o desempenho de um modelo (ou modelos) a partir do desenvolvimento de um modelo de previsão para os resíduos envolve provavelmente algum tipo de amostra dividida ou procedimento de validação cruzada. Quando mais de um modelo de previsão parecer razoável para uma determinada aplicação, essas medidas de precisão do tempo também podem ser utilizadas para estabelecer diferenciação entre modelos concorrentes.

Costuma-se avaliar o desempenho do modelo de previsão usando os erros de previsão um passo a frente

$$e_t(1) = y_t - \hat{y}_t(t-1) \quad (1)$$

onde, $\hat{y}_t(t-1)$ é a previsão de y_t estabelecida em um período anterior.

As medidas quantitativas mais formais de desempenho e otimização são em muitos casos de previsão, o principal critério de seleção de um modelo de previsão (RAGSDALE, 2008). Estas medidas permitem a medição da eficácia de um modelo de previsão, mostrando o quanto ele é capaz de reproduzir os dados que são já conhecidos. Para o analista de previsão o diferencial para seleção de um método previsão está na precisão da previsão futura, ou seja, o método capaz de gerar previsões que sejam tão precisas quanto possível. Dentre estas medidas estatísticas, geralmente as mais utilizadas são as mostradas a seguir.

Suponha que existem n observações para as quais as previsões foram estabelecidas e n erros de previsão um passo à frente, $e_t(1)$, $t = 1, 2, \dots, n$. As medidas padrão de precisão da previsão são o erro médio

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t(1) \quad (2)$$

o desvio médio absoluto (ou erro médio absoluto)

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t(1)| \quad (3)$$

e o erro quadrático médio

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [e_t(1)]^2 \quad (4)$$

É importante salientar que quando se as medidas de precisão que são escalas dependentes não facilitar a comparação de um único modelo de previsão através de diferentes séries temporais ou comparações entre diferentes períodos de tempo, é necessário a utilização de uma medida de previsão relativa de erro tal como o erro percentual médio de previsão

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n re_t(1) \quad (5)$$

e o erro percentual absoluto médio de previsão

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |re_t(1)| \quad (6)$$

3. Gráficos de controle para o monitoramento de modelos de previsão

As previsões geralmente são estabelecidas em intervalos regulares (por exemplo, semanais, mensais, trimestrais, etc.). Como os erros de previsão são a regra e não a exceção, haverá uma sucessão de erros de previsão. O rastreamento e a análise desses erros de previsão podem fornecer informações úteis que indiquem se as previsões estão realizadas de forma satisfatória (CROUX *et al.*, 2011). Neste cenário, o monitoramento do desempenho de um modelo que envolve o controle efetivo dos erros de previsão (resíduos) é considerado parte essencial do projeto para um bom sistema de previsão.

Há uma variedade de possíveis fontes de erros de previsão, incluindo as seguintes:

a) O modelo pode ser inadequado devido a: (i) a omissão de uma variável importante; (ii) uma alteração ou mudança na variável que o modelo não pode tratar (por exemplo, o aparecimento súbito de uma tendência ou ciclo) ou; (iii) o aparecimento de uma nova variável (por exemplo, uma nova concorrente).

- b) Variações irregulares podem ocorrer devido a mau tempo ou outros fenômenos naturais, escassez temporária ou avarias, catástrofes, ou eventos similares.
- c) A técnica de previsão pode ser utilizada de forma incorreta, ou os resultados mal interpretados.
- d) Variações aleatórias sempre presentes. A aleatoriedade é a variação inerente que permanece nos dados depois que contabilizadas todas as causas de variação.

A previsão é geralmente considerada adequada, quando os erros apresentam apenas variações aleatórias. Assim, a chave para avaliar quando reexaminar a validade de um modelo de previsão em particular, é verificar se os erros de previsão são aleatórios. Se esses erros não são aleatórios, é necessário investigar o processo para determinar qual das outras fontes estão presentes e como corrigir o problema (STEVENSON, 2012).

O gráfico de controle para erros de previsão é uma forma simples, mas eficaz para monitorar rotineiramente o desempenho de um modelo de previsão. É uma ferramenta estatística muito útil para a detecção de não aleatoriedade dos erros. Nele, os erros são traçados na ordem em que eles ocorrem, como ilustrado na figura 2. A linha central do gráfico representa um erro igual a zero. As outras duas outras linhas, acima e abaixo da linha central, são os chamados respectivamente de limites de controle superior e inferior, uma vez que representam as extremidades superior e inferior do intervalo de variação aceitável para os erros.

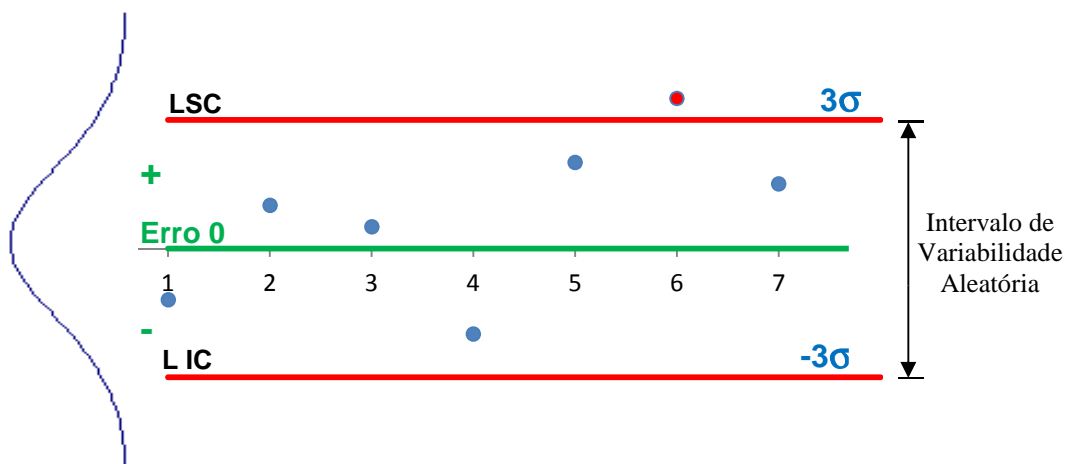


Figura 2 - Representação conceitual de um gráfico de controle (Adaptado de Stevenson, 2012)

Para que os erros de previsão possam ser considerados sob controle, duas ocorrências são necessárias. Uma delas é que todos os erros estejam dentro dos limites de controle. A outra é que nenhum padrão (por exemplo, tendências, ciclos, dados não centrados) esteja presente. Ambas podem ser constatadas por meio de inspeção.

Do ponto de vista técnico, pode-se determinar os valores ultrapassados ou os limites de controle sem efetivamente traçar os erros. No entanto, a detecção visual de padrões geralmente requer que os erros sejam traçados, por isso é recomendável para a construção de um gráfico de controle que os erros sejam traçados no gráfico.

A construção de gráfico de controle para monitorar erros de previsão inicia-se com o cálculo do MSE (*Mean Square Error*) que na prática é utilizado como uma estimativa do valor real do

desvio padrão $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (e - \bar{e})^2}{n}}$ da distribuição. Isto é,

$$\sigma = \sqrt{MSE} \quad (7)$$

Os gráficos de controle são baseados na suposição de que os erros são aleatórios e distribuídos de acordo com uma distribuição normal em torno de uma média de zero. Numa distribuição normal, aproximadamente 95,5% dos valores (erros) podem ser esperados para cair no intervalo de variabilidade aleatória, ou seja, dentro dos limites de dois desvios padrão ($0 \pm 2\sigma$) e, aproximadamente 99,7% para cair no intervalo de variabilidade aleatória ($0 \pm 3\sigma$) conforme ilustrado na figura 2. Com isso em mente, as seguintes expressões podem ser utilizadas para se obter os limites superior (LSC) e inferior (LIC) de controle:

$$LSC = 0 + z\sqrt{MSE} \quad (8)$$

$$LIC = 0 - z\sqrt{MSE} \quad (9)$$

Nos quais, z indica o número de desvios padrão de afastamento em relação à linha média. Por exemplo, os limites de controle com três desvios padrão de afastamento em relação à linha média ($z = \pm 3\sigma$) utilizados no desenvolvimento do gráfico mostrado na figura 2.

3.1 Gráficos de controle do tipo Shewhart

Existem várias maneiras de monitorar o desempenho dos modelos de previsão. A maneira mais simples é aplicar gráficos de controle do tipo Shewhart para os erros de previsão. Trata-se de um gráfico dos erros de previsão (resíduos) em função do tempo. Nele, uma linha central representa a média (ou valor nominal) dos erros de previsão e um conjunto de limites de controle que são projetados para fornecer uma indicação de que o desempenho do modelo de previsão sofreu ou não alterações. A linha central é geralmente tomada como o zero (que é o erro de previsão esperado para uma previsão imparcial) ou o erro médio previsão médio (ME, equação (2)), e os limites de controle são normalmente utilizados com três desvios padrão dos erros previsão erros acima e abaixo da linha central. Se os erros de previsão assinalados no gráfico ficarem dentro dos limites de controle, o desempenho do modelo de previsão é considerado satisfatório ou (sob controle), mas, se um ou mais erros de previsão exceder os limites de controle, é um sinal de que algo aconteceu e os erros de previsão já não flutuam mais em torno de zero. Na terminologia do gráfico de controle, diríamos que o processo de previsão está fora de controle e algumas análises são necessárias para determinar o que realmente aconteceu.

Os gráficos de controle do tipo Shewhart mais conhecidos são aqueles aplicados aos dados que foram coletados em amostras de subgrupos racionais ($n > 1$). No entanto, os erros de previsão um passo a frente $e_t(1)$ são observações individuais. Portanto, o gráfico de controle do tipo Shewhart para observações individuais são utilizados para o monitoramento de previsão. Neste gráfico de controle uma prática bastante comum é a estimação do desvio padrão das observações individuais, utilizando um método de amplitude móvel. A amplitude móvel é definida como o valor absoluto da diferença entre quaisquer dois sucessivos erros um passo a frente de previsão, isto é, $|e_t(1) - e_{t-1}(1)|$, e a amplitude móvel com base em n observações é

$$RM = \sum_{t=2}^n |e_t(1) - e_{t-1}(1)| \quad (10)$$

A estimativa do desvio padrão dos erros de previsão a um passo à frente é baseada na média \overline{RM} das amplitudes móveis

$$\hat{\sigma}_{e(1)} = \frac{\overline{RM}}{d_2(n-1)} = \frac{0,8865\overline{RM}}{n-1} = \frac{0,8865 \sum_{t=2}^n |e_t(1) - e_{t-1}(1)|}{n-1} \quad (11)$$

onde d_2 é a constante desse gráfico utilizada para estimar $\hat{\sigma}_{e(1)}$. Se a amplitude móvel de $n = 2$ é usada, então $d_2 = 1,128$. Esta estimativa do desvio padrão é utilizada para calcular os limites de controle do gráfico de erros de previsão. Para o gráfico de controle do tipo Shewhart para observações individuais os parâmetros (limites de controle) são calculados por:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{x} + 3 \frac{\overline{RM}}{d_2} \\ LM &= \bar{x} \\ LSC &= \bar{x} - 3 \frac{\overline{RM}}{d_2} \end{aligned} \quad (12)$$

Dois outros tipos de gráficos de controle, o da Soma Acumulada (CUSUM) e da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (EWMA), conhecidos como gráficos do tipo memória, também podem ser utilizados para monitorar o desempenho de um modelo de previsão (MONTGOMERY, 2013).

3.2 Gráficos de controle do tipo Memória

O monitoramento de pequenas alterações nos erros de um modelo de previsão é uma tarefa realmente importante numa perspectiva de aumentar a consistência da acurácia de um modelo de previsão. Os gráficos de controle com memória são ferramentas alternativas de grande sensibilidade, mais apropriadas para a rápida detecção de pequenas alterações, em contraste com os tradicionais gráficos de controle de Shewhart, nos quais apenas a informação do último ponto demarcado no gráfico é considerada (ALVES, *et al.*, 2011). Estes gráficos são mais eficazes na detecção de pequenas alterações ou perturbações no desempenho do modelo de previsão do que o gráfico do tipo Shewhart para observações individuais. Assim, são capazes de detectar mudanças mais sutis na média (ou até mesmo na variabilidade) aumentando a eficácia do monitoramento (LOUZADA, *et al.*, 2013)

O diferencial de gráficos com memória é que sua representação gráfica não se baseia em observações individuais, ou médias de subgrupos racionais, mas no acúmulo de observações. É por isso que eles são chamados de gráficos do tipo memória. Suponha que se deseja controlar a evolução de uma variável $\hat{y}_n(t-1)$ de previsão de um determinado modelo. As sucessivas observações dessa variável são, $\hat{y}_1(t-1)$, $\hat{y}_2(t-1)$, ..., $\hat{y}_n(t-1)$. Considerando que a variável $\hat{y}_n(t-1)$ deve assumir o valor alvo T desejado, os valores, $e_1 = (\hat{y}_1(t-1) - T)$, $e_2 = (\hat{y}_2(t-1) - T)$, ..., $e_n = (\hat{y}_n(t-1) - T)$ correspondem à sequência de desvios de erros de previsão em relação ao valor alvo, T . Se ocorrer uma alteração muito pequena, a evolução dos valores e_1 , e_2 , ..., e_n seria pouco eficaz para detectá-la. É mais eficiente o desenvolvimento de uma representação gráfica baseada em e_1 , $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$, ..., etc., de modo que a cada instante as informações históricas também sejam consideradas. Uma pequena alteração irá se acumulando até que seja evidente sua detecção.

3.2.1 Gráfico de controle de Soma Acumulada (CUSUM)

Enquanto os gráfico de controle do tipo Shewhart é amplamente conhecido e frequentemente mais utilizado na prática em função de sua simplicidade e desempenho global, outros tipos de

gráficos, tais como os gráfico CUSUM, são úteis e as vezes de forma natural mais adequados ao ambiente de monitoramento de erros de previsão, tendo em vista a natureza seqüencial da coleta de dados. O gráfico de controle de Soma Acumulada (CUSUM) é um procedimento que utiliza a soma acumulada dos desvios de cada erro aleatório de previsão previamente observado em relação ao valor alvo desejado, para monitorar os erros de um determinado modelo de previsão. Nesse gráfico, a soma acumulada é muito eficaz na detecção de mudanças do nível da variável monitorada (MONTGOMERY, 2008). Este procedimento incorpora todas as informações na seqüência de valores da amostra, para traçar no gráfico uma função da soma acumulada dos desvios positivos e negativos entre cada valor da amostra e um valor alvo desejado (HAWKINS, 1998). É uma boa alternativa ao gráfico do tipo Shewhart para detectar pequenas mudanças na distribuição dos erros de previsão, manter um controle apertado sobre a previsão e fornecer uma estimativa do novo nível da variável monitorada. No desenvolvimento desse gráfico os desvios dos erros de previsão que estão acima do valor alvo T desejado (geralmente zero ou o erro médio de previsão) são acumulados com uma estatística C^+ e desvios que estão abaixo desse valor alvo com outra estatística C^- . As estatísticas C^+ e C^- são denominadas de CUSUM Superior e CUSUM Inferior, respectivamente. Estas estatísticas são calculadas como,

$$C_t^+ = \max [0, e_t(1) - (T + K) + C_{t-1}^+]$$

$$C_t^- = \min [0, e_t(1) - (T - K) + C_{t-1}^-] \quad \text{para } t=1,2,3,\dots \quad (13)$$

onde a constante K , usualmente chamada de valor de referência, é geralmente escolhida como $K = 0,5\sigma_{e(1)}$ sendo que $\sigma_{e(1)}$ é o desvio padrão dos erros de previsão um passo à frente.

A lógica é que, se os erros de previsão começam a reduzir sistematicamente de um lado do valor alvo (ou zero), uma das somas C_t^+ ou C_t^- da equação (13) aumentará em magnitude. Quando esse aumento torna-se grande o suficiente, um sinal de fora de controle é gerado. A regra de decisão para sinalizar se a estatística C_t^+ excede o intervalo de decisão é quando $H = 5\sigma_{e(1)}$ ou se C_t^- excede a $-H$.

3.2.2 Gráfico de controle de Média Móvel Exponencialmente Ponderada (EWMA)

O gráfico EWMA com base na média móvel exponencialmente ponderada é também uma boa alternativa ao gráfico de controle do tipo Shewhart, quando se está interessado em detectar em um determinado modelo, pequenas mudanças nos erros de previsão. O desempenho deste gráfico de controle é aproximadamente equivalente ao gráfico CUSUM, e é, também tipicamente utilizado com observações individuais (MONTGOMERY, 2008). A média móvel exponencialmente ponderada aplicada aos erros de previsão a um passo a frente é,

$$\bar{e}_t(1) = \lambda e_t(1) + (1 - \lambda)\bar{e}_{t-1}(1) \quad (14)$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante (usualmente chamada constante de suavização) e o ponto de partida do EWMA (requerida na primeira observação) é $\bar{e}_0(1)$ ou o erro médio de previsão. Os valores típicos da constante de suavização para um gráfico de controle EWMA estão entre $0,05 < \lambda < 0,2$.

O EWMA é uma média ponderada de todos os erros de previsão atuais e anteriores, e os pesos decrescem geometricamente com o período de tempo da amostra do erro de previsão. Para isso, basta simplesmente substituir de forma recursiva para $\bar{e}_{t-1}(1)$, $\bar{e}_{t-2}(1)$, $\bar{e}_{t-1}(1)$, $\bar{e}_{t-j}(1)$

para $j = 3, 4, \dots$ até que se obtenha $\bar{e}_n(1) = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} (1-\lambda)^j e_{T-j}(1) + (1-\lambda)^n \bar{e}_0(1)$ e, nota-se que a

soma dos pesos a unidade, porque $\lambda \sum_{j=0}^{n-1} (1-\lambda)^j = 1 - (1-\lambda)^n$.

O desvio padrão do EWMA é $\sigma_{\bar{e}_t}(1) = \sigma_e(1) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]}$

Assim, um gráfico de controle EWMA para os erros de previsão um passo a frente com uma linha central de T (o alvo desejado para os erros de previsão) é definida da seguinte forma:

$$LSC = T + 3\sigma_e(1) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]}$$

$$LM = T \tag{15}$$

$$LIC = T - 3\sigma_e(1) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]}$$

Observa-se conforme LSC e LIC da equação (15) que o termo $[1 - (1-\lambda)^{2t}]$ se aproxima de 1 quando t se torna grande. Isso significa que, depois que o gráfico de controle estiver sendo utilizado por vários períodos de tempo, os limites de controle se aproximarão dos valores de estado estacionário dados por

$$LSC = T + 3\sigma_e(1) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$LM = T \tag{16}$$

$$LIC = T - 3\sigma_e(1) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

Para maiores detalhes sobre o desenvolvimento e interpretação de gráficos de controle, ver Montgomery (2013) e Samohyl (2009).

4. Aplicação

Neste trabalho, para esclarecer a sistemática da avaliação e monitoramento do desempenho de modelos de previsão, são utilizados dados reais referentes ao histórico de vendas mensais de uma indústria do setor metal mecânico do norte do estado de Santa Catarina. Esses dados envolvem o histórico de vendas de uma categoria de produtos dessa indústria cuja série temporal da previsão de demanda para essa categoria é obtida a partir do modelo de previsão Holt-Winters Sazonal multiplicativo.

A análise da série temporal da previsão de demanda estabelecida com este modelo de suavização exponencial envolve os dados técnicos relevantes e relativos às características técnicas de montagem de equipamentos para tal produto, encontrados no contexto real durante 48 meses, no período de janeiro de 2007 a dezembro de 2011.

A figura 3 ilustra para esse período numa planilha em ambiente MS-Excel, a avaliação do desempenho desse modelo de previsão que inclui o erro de previsão, as medidas de precisão (acurácia) e a representação gráfica do histórico de vendas x previsão.

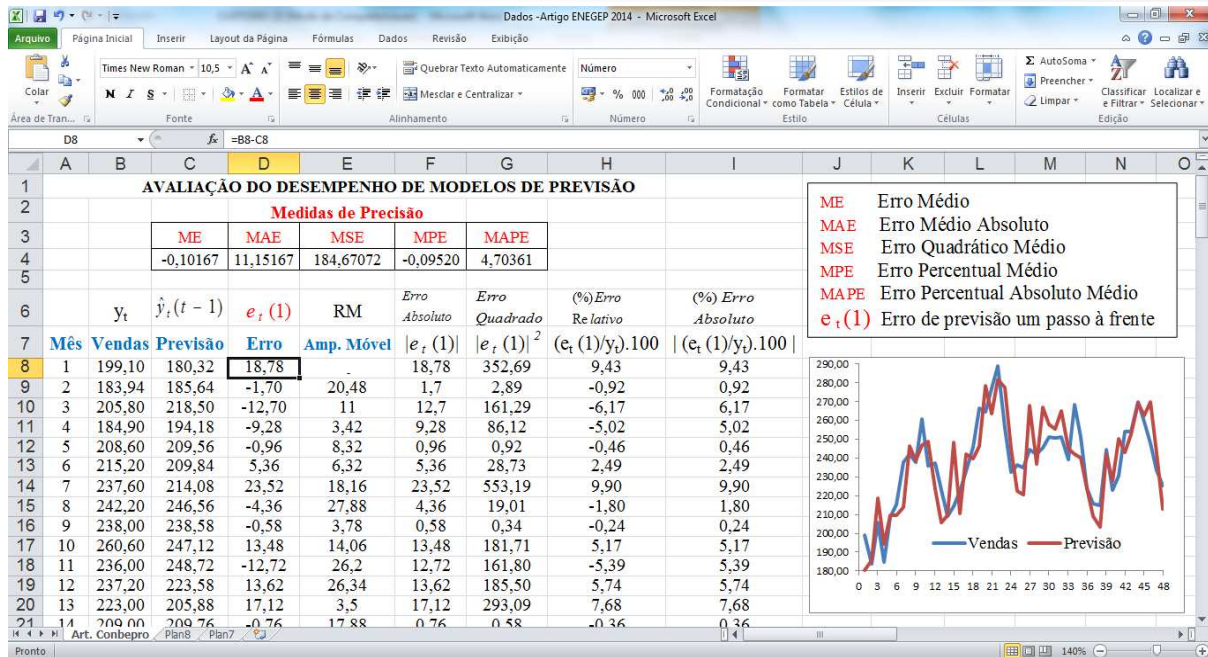


Figura 3 - Cálculo dos erros de previsão $e_t(1)$, medidas de precisão e representação gráfica vendas x previsão

O estudo preliminar da avaliação do desempenho para o modelo de previsão em questão, revela erros de previsão um passo a frente, $e_t(1)$ e medidas quantitativas de precisão (acurácia) da previsão com resultados satisfatórios, ao longo desse período de quatro anos. Além disso, a análise gráfica para prever o valor da variável de série temporal revela série temporal não estacionária, ilustrando uma determinada tendência crescente nas vendas e exibem a presença de efeitos sazonais ao longo desse período.

A análise estatística preliminar para o monitoramento do desempenho desse modelo de previsão inicia-se com a verificação da normalidade e independência dos erros de previsão (resíduos) $e_t(1)$ desenvolvida em ambiente R para os dados reais referentes ao histórico de vendas mensais utilizados nessa aplicação, conforme figura 4.

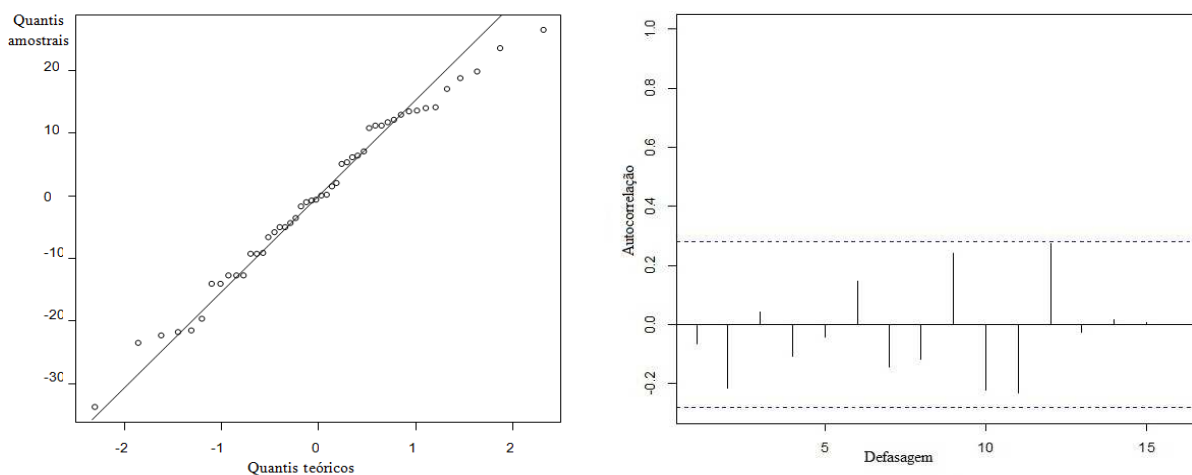


Figura 4 – Gráficos da probabilidade normal e da Função autocorrelação amostral (FAC) dos erros de previsão

Como se pode observar, os erros (resíduos), $e_t(1)$ desse modelo de previsão se comportam segundo uma distribuição normal e não apresentam autocorrelação.

O desenvolvimento dos principais gráficos de controle com estimativa do desvio padrão dos

erros de previsão um passo à frente, $\hat{\sigma}_{e(1)}$ com base na média das amplitudes móveis, \overline{RM} e limite médio de controle LMC= - 0,10166 (erro médio de previsão, ME) para monitorar rotineiramente o desempenho desse modelo de previsão real durante 48 meses, no período de janeiro de 2007 a dezembro de 2011. Para o desenvolvimento desses gráficos utilizou-se também outros parâmetros tais como: do tipo Shewhart (LSC= 43,65 e LIC= - 43,85); CUSUM ($\delta=1$; $K=0,5$; LSC = H = 5 e LIC = -H = - 5) e EWMA ($\lambda = 0,1$ e L = 3) conforme figuras 5 e 6.

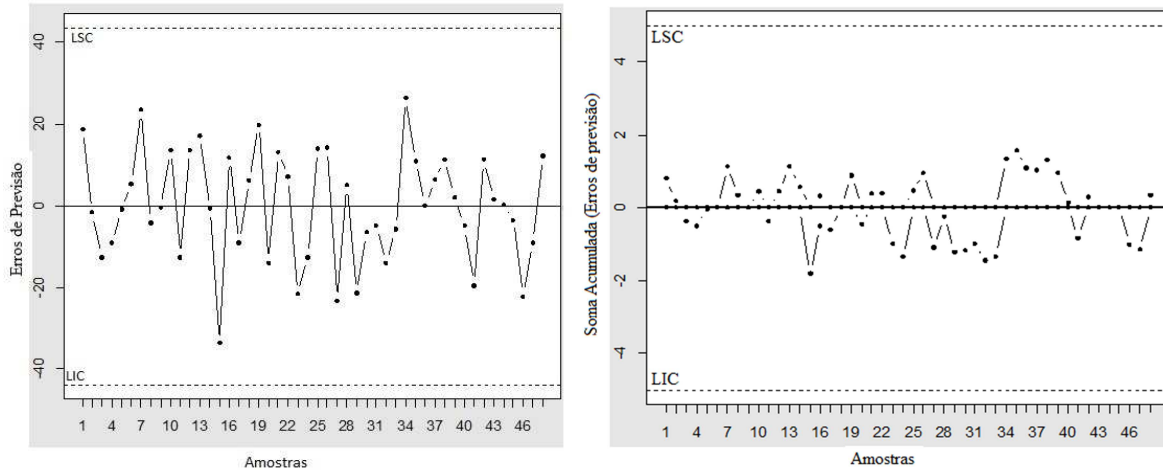


Figura 5 - Gráfico de controle do tipo Shewhart e Gráfico de controle de Soma Acumulada (CUSUM)

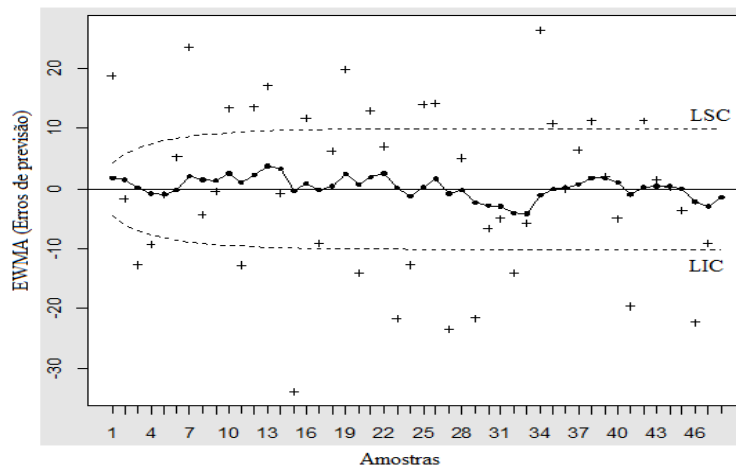


Figura 6 - Gráfico de controle de Média Móvel Exponencialmente Ponderada (EWMA)

Como se pode observar, estas três ferramentas estatísticas (figuras 5 e 6) são muito úteis para a detecção de não aleatoriedade dos erros de previsão. Para os dados dessa aplicação, os gráficos de memória CUSUM e EWMA revelam ao longo do período da previsão uma melhor visibilidade do comportamento dos erros em relação ao gráfico de Shewhart tais como as sequências de amostras 7^a a 14^a com erro de previsão acima do erro médio, amostras 29^a a 33^a com erro de previsão abaixo do erro médio e sequência de amostras 42^a a 45^a com erro de previsão próximos do erro médio.

5. Considerações Finais

O monitoramento do desempenho de um modelo de previsão, última atividade do processo de um sistema de previsão após a implantação do modelo, deve ser contínua para garantir que ele ainda esteja funcionando de forma satisfatória. Envolve o controle efetivo dos erros de

previsão (resíduos), e é considerado parte essencial do projeto para um bom sistema de previsão. É uma ferramenta estatística muito útil para a detecção da não aleatoriedade dos erros.

O gráfico de controle para erros de previsão é uma ferramenta simples, mas eficaz para monitorar rotineiramente o desempenho de um modelo de previsão. Existem vários tipos de gráficos de controle para erros de previsão que podem ser aplicados em um modelo de previsão. O mais simples é o gráfico de controle do tipo Shewhart. Este gráfico é ainda, sem dúvida, o mais conhecido e amplamente aplicado para monitorar erros de previsão. Apesar de eficaz, esta ferramenta estatística não é a única disponível para monitorar erros de previsão. Em alguns casos, outros tipos de gráficos podem ser utilizados com a mesma finalidade, e com vantagens. É o caso dos gráficos de controle do tipo memória CUSUM e EWMA utilizados para monitorar pequenas alterações (ALVES, 2003).

O monitoramento de pequenas alterações nos erros de um modelo de previsão via gráficos do tipo memória é uma alternativa importante numa perspectiva de aumentar a consistência da acurácia de um modelo de previsão.

É importante ainda salientar que a implementação de qualquer gráfico de controle para erros de previsão, pressupõe uma escolha adequada dos parâmetros, uma vez que a sua eficiência depende em parte desta escolha.

Referências

ALVES, C.C.; ZAGO, A.A.; HENNING, E.; SAMOBYL, R.W. *Aplicação de gráficos de controle com memória para o monitoramento de processos industriais: um estudo comparativo*. XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional Ubatuba- SP, 2011.

ALVES, C.C. *Gráficos de controle CUSUM: um enfoque dinâmico para a análise estatística de processos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, 2003.

ATIENZA, O. O., ANG, B. W., TANG, A. C. *Statistical process control and forecasting*, International Journal of Quality Science, Vol. 2 Iss: 1, pp.37 – 51, 1997.

CROUX, C.; GELPER, S.; MAHIEU, G. *Robust control charts for time series data*. Expert Systems with Applications, Vol. 38, n.11, p. 13810-13815, 2011.

HAWKINS, D.M., OLWELL, D.H. *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*, Statistics for Engineering and Physical Science, Springer, 1998.

LOUZADA, F.; DINIZ, C. A. R.; FERREIRA, P. H.; FERREIRA, E. L. *Controle Estatístico de Processos: Uma abordagem prática para cursos de Engenharia e Administração*. 1ª ed., 282 pág., Rio de Janeiro: LTC Editora, 2013.

MONTGOMERY, D.C., JENNINGS, C.L., KULAHCI, M. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*, Edition 1th, John Wiley & Sons, 2008.

MONTGOMERY, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*. 7th edition New York: John Wiley & Sons, 768 p., 2013.

RAGSDALE, C.T. *Modelagem e Análise de Decisão*. Cengage Learning, 2009.

SAMOBYL, Robert W., SOUZA, Gueibi P. e MIRANDA, Rodrigo G. *Métodos simplificados de previsão empresarial*. Florianópolis: UFSC. 2008.

SAMOBYL, R.W. *Controle Estatístico de Qualidade*. São Paulo: Elsevier Campus, 2009.

STEVENSON, W.J., *Operations Management*, Rochester Institute of Technology, 11 th edition, McGraw-Hill, 2012.

VERÍSSIMO, A. J.; ALVES, C. C. ; HENNING, E.; AMARAL, C.E.; CRUZ, A.C. *Métodos Estatísticos de Suavização Exponencial Holt-Winters para Previsão de Demanda em uma Empresa do Setor Metal Mecânico*. Gestão Industrial, v. 8, n. 4, p. 154-171, 2012.